数理解析研究所講究録 第2120巻 2019年 166-171

The Grothendieck-Teichmüller group as an open subgroup of the outer automorphism group of the étale fundamental group of a configuration space

Dedicated to Professor Yasutaka Ihara on the occasion of his eightieth birthday

南出 新 (京都大学 数理解析研究所)
Arata Minamide
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

1 序論

本稿では, 星裕一郎氏, 望月新一氏との共同研究（[HMM] を参照）で得られた, グロタンディーク・タイヒミューラー群 GT に関する結果を紹介します. 本稿の主結果（の証明）に関してより詳細な説明を行っている日本語文献としては, [南出] が挙げられます.

以下では, n を正の整数, k を標数 0 の代数閉体, X を $\mathbb{P}^1_k \setminus \{0,1,\infty\}$, X_n を X の n 次配置空間, 即ち,

$$X_n \ \stackrel{\mathrm{def}}{=}\ \{(x_1,\ldots,x_n) \in \overbrace{X \times_k \cdots \times_k X}^{n} \mid \text{任意の } 1 \leq i < j \leq n \text{ に対し, } x_i \neq x_j\}$$

とします. また, X_n のエタール基本群を Π_n と書くことにします. 良く知られているとおり, Π_n は位相的に有限生成ですので, Π_n の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(\Pi_n)$ は自然な副有限群の構造を持つことに注意します. すると, 実際には X_n が有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義されていることから, 自然な外作用

$$\rho_n : G_{\mathbb{Q}} \ \stackrel{\mathrm{def}}{=}\ \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \ \to\ \mathrm{Out}(\Pi_n)$$

が定まります. ここで, Belyi の定理の帰結によって, この外作用が忠実であることに注意します.

次に, グロタンディーク・タイヒミューラー群 GT について復習します. Drinfeld は, [D] において, 階数 2 の自由副有限群の自己同型であって適切な条件をみたすもののなす群として GT を定義し, 以下の観察を得ました（(I) の厳密な証明については [IM], Appendix を, (II) の厳密な証明については [I3] を参照）:

(I) 自然な忠実外作用 $\overline{\rho}_n : \mathrm{GT} \ \to\ \mathrm{Out}(\Pi_n)$ が存在する.

(II) 包含関係 $\mathrm{Im}(\rho_n) \ \subseteq\ \mathrm{Im}(\overline{\rho}_n)$ が存在する.

特に, $G_{\mathbb{Q}}$ と $\mathrm{Im}(\rho_n)$, そして, GT と $\mathrm{Im}(\overline{\rho}_n)$ を同一視することで, 次の包含関係が得られます:

$$G_{\mathbb{Q}} \ \subseteq\ \mathrm{GT} \ \subseteq\ \mathrm{Out}(\Pi_n).$$

このとき, 次の問題 1.1 は非常に興味深い問題です:

問題 1.1. $\mathrm{Out}(\Pi_n)$ 内において, GT は $G_{\mathbb{Q}}$ の良い近似物となっているか.（例えば, $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{GT}$ となるか.）

2 主結果

以下では, 正の整数 r に対し, r 次対称群を $\mathfrak{S}_r$ と書くことにします. また, $r \geq 4$ のとき, k スキーム上の $(0, r)$ 型曲線 — 即ち, k スキーム上の種数 0 の固有平滑曲線（の族）であって r 個の（順序付けられた）相異なる切断が付随したもの — のモジュライスタックを $\mathcal{M}_{0,r}$ と書くことにします.

そして以下では,

$$n \ \geq \ 2$$

と仮定します. すると,（k スタックの）自然な同型 $X_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{0,n+3}$ の存在から, 自然な忠実外作用

$$\mathfrak{S}_{n+3} \ \to \ \mathrm{Out}(\Pi_n)$$

が定義されます. この外作用と, 前節で復習した外作用 $\overline{\rho}_n$ に関して, 次が成り立ちます：

定理 2.1.（主結果）二つの自然な外作用 $\mathrm{GT} \to \mathrm{Out}(\Pi_n)$, $\mathfrak{S}_{n+3} \to \mathrm{Out}(\Pi_n)$ は同型

$$\mathrm{GT} \times \mathfrak{S}_{n+3} \ \xrightarrow{\sim} \ \mathrm{Out}(\Pi_n)$$

を誘導する.

特に, 定理 2.1 の帰結として,

（前節の最後の）包含関係 $G_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathrm{GT} \subseteq \mathrm{Out}(\Pi_n)$ において, GT と $\mathrm{Out}(\Pi_n)$ はほとんど等しい

ということが従います（問題 1.1 を参照）.

次に, 定理 2.1 の応用を述べます. 以下では, 群 G とその部分群 H に対し, H の G における中心化群を $Z_G(H)$ と書くことにします. また, 副有限群 G に対し,

$$Z^{\mathrm{loc}}(G) \ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ \varinjlim_{H \subseteq G} Z_G(H)$$

— ここで, H は G の開部分群を走る — と書くことにします.

系 2.2. GT, $\mathfrak{S}_{n+3}$ を（定理 2.1 の同型を介して）$\mathrm{Out}(\Pi_n)$ の部分群と見做すとき, 以下が成り立つ：

(i) $\mathfrak{S}_{n+3} \ = \ Z^{\mathrm{loc}}(\mathrm{Out}(\Pi_n))$.

(ii) $\mathrm{GT} \ = \ Z_{\mathrm{Out}(\Pi_n)}(\mathfrak{S}_{n+3}) \ = \ Z_{\mathrm{Out}(\Pi_n)}(Z^{\mathrm{loc}}(\mathrm{Out}(\Pi_n)))$.

特に, 系 2.2, (ii) の帰結として,

副有限群 Π_n さえ与えられれば,（単純な）純群論的な操作のみを用いて GT を定義できる

ということが従います.

3　先行研究

以下では, $\mathcal{M}_{0,n+3}$ の Deligne-Mumford コンパクト化を $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ と書くことに, また, $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3} \setminus \mathcal{M}_{0,n+3}$ の既約成分の集合を $\mathbb{D}$ と書くことにします. すると, $\delta \in \mathbb{D}$ は惰性群

$$I_\delta \ \subseteq \ \Pi_n$$

を（Π_n 共役を除いて一意に）定めます. このとき,

$$\mathrm{Out}^\flat(\Pi_n) \ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ \{\sigma \in \mathrm{Out}(\Pi_n) \mid \text{任意の } \delta \in \mathbb{D} \text{ に対し, } \sigma(I_\delta) \text{ は } I_\delta \text{ と } \Pi_n \text{ 共役になる } \}$$

と書くことにします（[I1], [N] を参照）.

Harbater と Schneps は, [HS] において, 次を示しました：

定理 3.1. $\mathfrak{S}_{n+3}$ を（自然な忠実外作用 $\mathfrak{S}_{n+3} \to \mathrm{Out}(\Pi_n)$ を介して）$\mathrm{Out}(\Pi_n)$ の部分群と見做すとき, 自然な外作用 $\mathrm{GT} \to \mathrm{Out}(\Pi_n)$ は同型

$$\mathrm{GT} \ \stackrel{\sim}{\to} \ \mathrm{Out}^\flat(\Pi_n) \ \cap \ Z_{\mathrm{Out}(\Pi_n)}(\mathfrak{S}_{n+3}) \ \ (\subseteq \ \mathrm{Out}(\Pi_n))$$

を誘導する.

今回の共同研究で得られた結果（系 2.2, (ii) を参照）は,

定理 3.1 の同型の右辺から "$\mathrm{Out}^\flat(\Pi_n)$" を削除できる

ということを主張しています.

4　証明の概略

i を $1 \leq i \leq n+3$ みたす整数とします. このとき, i 番目の切断を忘れることによって得られる射影

$$\pi_i : X_n \ \stackrel{\sim}{\to} \ \mathcal{M}_{0,n+3} \ \to \ \mathcal{M}_{0,n+2} \ \stackrel{\sim}{\to} \ X_{n-1}$$

は全射

$$p_i : \Pi_n \ \twoheadrightarrow \ \Pi_{n-1}$$

を誘導します. このようにして得られる p_i たちに関して, 次が成り立ちます：

命題 4.1. $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Pi_n)$ を Π_n の任意の自己同型とする. このとき, α は集合

$$\{\mathrm{Ker}(\Pi_n \stackrel{p_i}{\twoheadrightarrow} \Pi_{n-1})\}_{1 \leq i \leq n+3}$$

の置換を誘導する.

証明. l を任意の素数とする. また, Π_n の最大副 l 商 $\Pi_n^{(l)}$ の降中心列に付随した $\mathbb{Q}_l$ 上の次数付きリー代数を $\mathrm{Gr}_{\mathbb{Q}_l}(\Pi_n^{(l)})$ と書くことにする. すると, 命題 4.1 は, $\mathrm{Gr}_{\mathbb{Q}_l}(\Pi_n^{(l)})$ の自己同型群に関する計算

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Gr}_{\mathbb{Q}_l}(\Pi_n^{(l)})) \ \cong \ \mathfrak{S}_{n+3} \times \mathbb{Q}_l^\times$$

([N] を参照）と（自由副有限群に対する）Lubotzky-Melnikov-van den Dries の定理[*1] から従う. □

注 4.2. "$\mathbb{P}^1_k \setminus \{0,1,\infty\}$" を "$k$ 上の双曲的曲線" に置き換えた場合についても, "$\mathrm{Aut}(\mathrm{Gr}_{\mathbb{Q}_l}(\Pi_n^{(l)}))$" の構造が知られています（[NT] を参照）.

注 4.3. "$\mathbb{P}^1_k \setminus \{0,1,\infty\}$" を "$k$ 上の双曲的曲線" に置き換えた場合についても, 命題 4.1 と類似の結果が成り立つことが知られています（[MT], [HMM] を参照）.

特に, 命題 4.1 より, 準同型

$$\Phi_n : \mathrm{Out}(\Pi_n) \ \to \ \mathfrak{S}_{n+3}$$

を得ます. ここで, 自然な忠実外作用 $\mathfrak{S}_{n+3} \to \mathrm{Out}(\Pi_n)$ は Φ_n の分裂を定めることに注意します. したがって, 次の命題 4.4 を適用することで, 直積分解

$$\mathrm{Out}(\Pi_n) \ = \ \mathrm{Out}^*(\Pi_n) \times \mathfrak{S}_{n+3}$$

— ここで, $\mathrm{Out}^*(\Pi_n) \ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ \mathrm{Ker}(\Phi_n)$ — を得ます.

命題 4.4. $\mathfrak{S}_{n+3}$ を（自然な忠実外作用 $\mathfrak{S}_{n+3} \to \mathrm{Out}(\Pi_n)$ を介して）$\mathrm{Out}(\Pi_n)$ の部分群と見做すとき, 次の包含関係が成り立つ:

$$\mathfrak{S}_{n+3} \ \subseteq \ Z_{\mathrm{Out}(\Pi_n)}(\mathrm{Out}^*(\Pi_n)).$$

証明. 各 i に対して, $p_i : \Pi_n \to \Pi_{n-1}$ は準同型

$$p_i^* : \mathrm{Out}^*(\Pi_n) \ \to \ \mathrm{Out}^*(\Pi_{n-1})$$

を誘導することに注意する. すると, 命題 4.4 は, 以下の事実（[HM2] を参照）から従う：

- 任意の整数の組 (i,j) — ただし, $1 \leq i < j \leq n+3$ — に対し, $p_i^* = p_j^*$ が成り立つ.
- 任意の i に対し, p_i^* は単射.

□

注 4.5. 準同型 $\mathrm{Out}^*(\Pi_n) \to \mathrm{Out}^*(\Pi_{n-1})$ と類似の準同型 — 例えば, $\mathrm{Out}^\flat(\Pi_n) \to \mathrm{Out}^\flat(\Pi_{n-1})$ など — の単射性, 全射性について, これまで様々な研究がなされてきました. これらの研究については, [I1], [I2], [IK], [N], [NTU], [HS], [Ts], [Ta], [M], [HM1], [HM2], [HM3] を参照ください.

一方, 命題 4.1, 4.4, そして, 組み合わせ論的遠アーベル幾何の結果（[M], [HM3] を参照）を用いることで,

$$\mathrm{Out}^\flat(\Pi_n) \ \cap \ Z_{\mathrm{Out}(\Pi_n)}(\mathfrak{S}_{n+3}) \ = \ \mathrm{Out}^*(\Pi_n)$$

が従います. 最後に, 定理 3.1 を適用することで, 同型

$$\mathrm{GT} \times \mathfrak{S}_{n+3} \ \stackrel{\sim}{\to} \ \mathrm{Out}^*(\Pi_n) \times \mathfrak{S}_{n+3} \ = \ \mathrm{Out}(\Pi_n)$$

を得ます.

[*1] G を位相的に有限生成な非可換自由副有限群, $H \subseteq G$ を位相的に有限生成な正規閉部分とする. このとき, $H \neq \{1\}$ であれば, H は G の開部分群である.

5　謝辞

本稿は, 研究集会 “Profinite monodromy, Galois representations, and Complex functions” での筆者による講演をまとめたものです．講演の機会を与えてくださった関係者の皆様に感謝申し上げます．また, 講演に際し, 様々なご助言をいただきました, 中村博昭先生, 玉川安騎男先生, 望月新一先生, 星裕一郎先生に感謝申し上げます．そして, 講演中, 講演後にコメントをくださった伊原康隆先生に感謝申し上げます。本稿の執筆に際し, 筆者は京都大学数理解析研究所共同利用・共同研究拠点事業の助成を受けております．

参考文献

[D] V. G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Algebra i Analiz* **2** (1990), pp. 149–181.

[HS] D. Harbater and L. Schneps, Fundamental groups of moduli and the Grothendieck-Teichmüller group, *Proceedings of the American Mathematical Society* **352** (2000), pp. 3117–3148.

[HMM] Y. Hoshi, A. Minamide, and S. Mochizuki, *Group-theoreticity of numerical invariants and distinguished subgroups of configuration space groups*, RIMS Preprint **1870** (March 2017).

[HM1] Y. Hoshi and S. Mochizuki, On the combinatorial anabelian geometry of nodally nondegenerate outer representations, *Hiroshima Math. J.* **41** (2011), pp. 275–342.

[HM2] Y. Hoshi and S. Mochizuki, Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves I: Inertia groups and profinite Dehn twists, *Galois-Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry*, *Adv. Stud. Pure Math.* **63**, Math. Soc. Japan (2012), pp. 659–811.

[HM3] Y. Hoshi and S. Mochizuki, *Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves II: Tripods and combinatorial cuspidalization*, RIMS Preprint **1762** (November 2012).

[I1] Y. Ihara, Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois groups, in *The Grothendieck Festschrift*, Vol. II, *Progress in Mathematics* **87**, Birkhäuser (1990), pp. 353–373.

[I2] Y. Ihara, On the stable derivation algebra associated with some braid groups, *Israel J. Math.* **80** (1992), pp. 135–153.

[I3] Y. Ihara, On the embedding of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ into $\widehat{GT}$, in *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants*, *London Math. Soc. Lecture Note Series* **200**, Cambridge Univ. Press (1994), pp. 289–305.

[IK] Y. Ihara and M. Kaneko, Pro-l pure braid groups of Riemann surfaces and Galois representations, *Osaka J. Math.* **29** (1992), pp. 1–19.

[IM] Y. Ihara and M. Matsumoto, On Galois Actions on Profinite Completions of Braid Groups, *Recent Developments in the Inverse Galois Problem*, *Contemp. Math.* **186**, AMS (1995), pp.173–200.

[M] S. Mochizuki, On the Combinatorial Cuspidalization of Hyperbolic Curves, *Osaka J. Math.* **47** (2010), pp. 651–715.

[MT] S. Mochizuki and A. Tamagawa, The Algebraic and Anabelian Geometry of Configuration Spaces, *Hokkaido Math. J.* **37** (2008), pp. 75–131.

[N] H. Nakamura, Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **1** (1994), pp. 71–136.

[NT] H. Nakamura and N. Takao, Galois rigidity of pro-l pure braid groups of algebraic curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), pp. 1079–1102.

[NTU] H. Nakamura, N. Takao, and R. Ueno, Some stability properties of Teichmüller modular function fields with pro-l weight structures, *Math. Ann.* **302** (1995), pp. 197–213.

[Ta] N. Takao, Braid monodromies on proper curves and pro-l Galois representations, *J. Inst. Math. Jussieu* **11** (2012), pp. 161–188.

[Ts] H. Tsunogai, The stable derivation algebras for higher genera, *Israel J. Math.* **136** (2003), pp. 221–250.

[南出] 南出新, グロタンディーク・タイヒミューラー群と関連したある直積分解について, to appear in RIMS 講究録別冊「代数的整数論とその周辺 2017」.